



ce
pre
UNI

Trigonometría

**SUMATORIAS Y PRODUCTORIAS
TRIGONOMÉTRICAS**

**CICLO
PRE
2024-I**



NOCIONES PREVIAS

NOTACIÓN SIGMA

Si n es un número entero positivo y si $a_1, a_2, \dots, a_n$ es un conjunto de números, entonces estos n números pueden ser representados por la notación a_k , para $k = 1, 2, \dots, n$ y la suma de todos ellos se puede representar con el símbolo

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

el cual se lee como “la sumatoria de los números a_k desde $k = 1$ hasta $k = n$ ”, a los números 1 y n se les denomina, respectivamente, el límite inferior y el límite superior de la sumatoria.

* Σ : se lee “sigma”. El símbolo Σ se usa para representar una sumatoria.

Ejemplos

1. La suma de los cuadrados de los cinco primeros enteros positivos pueden ser representados por :

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

tenga en cuenta que $a_k = k^2$.

2. La suma de los senos de los ángulos, cuyas medidas son los 30 primeros múltiplos impares de x , pueden ser representados por :

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(3x) + \text{sen}(5x) + \cdots + \text{sen}(59x) = \sum_{k=1}^{30} \boxed{\text{sen}((2k - 1)x)}$$

tenga presente que $a_k = \text{sen}((2k - 1)x)$.

PROPIEDADES

$$\text{i)} \quad \sum_{k=1}^n (c) = cn, \text{ para toda constante } c$$

$$\text{ii)} \quad \sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c \left(\sum_{k=1}^n a_k \right), \text{ para toda constante } c \in \mathbb{R}$$

$$\text{iii)} \quad \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \pm \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$

$$\text{iv)} \quad \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \quad (\text{Propiedad telescópica})$$

PROBLEMA 1

Simplifique $\sum_{k=1}^{90} \cos((4k - 2)x)$

A) $\frac{\text{sen}(180x)}{2\text{sen}(x)}$

B) $\frac{\text{sen}(180x)}{2\text{sen}(2x)}$

C) $\frac{\text{sen}(360x)}{\text{sen}(x)}$

D) $\frac{\text{sen}(360x)}{2\text{sen}(x)}$

E) $\frac{\text{sen}(360x)}{2\text{sen}(2x)}$

CLAVE: E

SUMA DE SENOS O COSENOS DE ARGUMENTOS QUE ESTÁN EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

$$\sum_{k=1}^n \text{sen}(x + kr) = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \text{sen}\left(\frac{P + U}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n \cos(x + kr) = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{P + U}{2}\right)$$

Donde:

n: es el número de términos

r: es la razón de la progresión aritmética del argumento

P: es el primer argumento de la sumatoria

U: es el último argumento de la sumatoria

PROBLEMA 2

Reduzca la sumatoria

$$\cos\left(\frac{\pi}{28}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{28}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{28}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{13\pi}{28}\right)$$

A) $\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{28}\right)$ B) $\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{28}\right)$ C) $\frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{28}\right)$ D) $\frac{1}{2} \csc\left(\frac{\pi}{28}\right)$ E) $\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{14}\right)$

CLAVE: D**PROBLEMA 3**Simplifique $\sin(2^\circ) - \sin(4^\circ) + \sin(6^\circ) - \sin(8^\circ) + \cdots - \sin(88^\circ)$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(44^\circ) \csc(1^\circ)$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(44^\circ) \sec(2^\circ)$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(44^\circ) \csc(1^\circ)$
D) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(44^\circ) \sec(2^\circ)$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(44^\circ) \sec(1^\circ)$

CLAVE: E

PROBLEMA 4

Calcule el valor de

$$\sin^2(\theta) + \sin^2\left(\frac{\pi}{7} - \theta\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{7} - \theta\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{7} - \theta\right) + \cdots + \sin^2\left(\frac{6\pi}{7} - \theta\right)$$

A) $\frac{7}{2}$

B) $\frac{7}{4}$

C) $\frac{7}{6}$

D) $\frac{7}{8}$

E) 1

CLAVE: A**PROBLEMA 5 (PC4 2018-1)**

Reduzca la sumatoria

$$\sin\left(\frac{\pi}{19}\right) + 2\sin\left(\frac{2\pi}{19}\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{19}\right) + \cdots + 18\sin\left(\frac{18\pi}{19}\right)$$

A) $\frac{19}{2} \tan\left(\frac{\pi}{19}\right)$

B) $\frac{19}{2} \cot\left(\frac{\pi}{38}\right)$

C) $\frac{19}{2} \cot\left(\frac{\pi}{19}\right)$

D) $\frac{19}{4} \tan\left(\frac{\pi}{38}\right)$

E) $\frac{19}{4} \cot\left(\frac{\pi}{38}\right)$

CLAVE: B

PROBLEMA 6

Calcule el valor de la sumatoria

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$$

A) $\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4n}\right)$ B) $\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4n+1}\right)$ C) $\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)$ D) $\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4n+3}\right)$ E) $\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4n+4}\right)$

CLAVE: C

PROPIEDAD

$$\sum_{k=1}^n \cos \left(\left(\frac{2k}{2n+1} \right) \pi \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{2n+1} \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{2n+1} \right) + \dots + \cos \left(\frac{2n\pi}{2n+1} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n \cos \left(\left(\frac{2k-1}{2n+1} \right) \pi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{2n+1} \right) + \dots + \cos \left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

Ejemplos:

$$\text{i) } \sum_{k=1}^3 \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{7} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{7} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^9 \cos \left(\frac{2k\pi}{19} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{19} \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{19} \right) + \dots + \cos \left(\frac{18\pi}{19} \right) = -\frac{1}{2}$$

PROBLEMA 7 (PC4 2018-2)

Calcule el valor de

$$\cos\left(\frac{13\pi}{42}\right)\cos\left(\frac{\pi}{42}\right) + \cos\left(\frac{19\pi}{42}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{42}\right) + \cos\left(\frac{25\pi}{42}\right)\cos\left(\frac{11\pi}{42}\right)$$

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{4}$

D) 1

E) $\frac{5}{4}$

CLAVE: B**PROBLEMA 8**

Calcule el valor de $N = \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

A) $1/4$

B) $3/4$

C) $5/4$

D) $7/4$

E) $9/4$

CLAVE: E

PROBLEMA 9

Calcule el valor de $N = 8\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 8\cos^2\left(\frac{5\pi}{7}\right) + 8\cos^2\left(\frac{10\pi}{7}\right)$

A) 4

B) 6

C) 8

D) 10

E) 12

CLAVE: D**PROBLEMA 10**

Calcule el valor de

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$ **CLAVE: A**

PROBLEMA 11 (PC4 2019-2)

Calcule el valor de
 $\tan(2^\circ) \operatorname{sen}(4^\circ) + \tan(6^\circ) \operatorname{sen}(12^\circ) + \tan(10^\circ) \operatorname{sen}(20^\circ) + \cdots$ 22 términos

A) 21,5

B) 22

C) 22,5

D) 43,5

E) 44,5

CLAVE: A**PROBLEMA 12**

Calcule el valor de
 $\operatorname{sen}(12^\circ) \operatorname{sen}(24^\circ) + \operatorname{sen}(36^\circ) \operatorname{sen}(72^\circ) + \operatorname{sen}(60^\circ) \operatorname{sen}(120^\circ) + \cdots + \operatorname{sen}(156^\circ) \operatorname{sen}(312^\circ)$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{\sqrt{5} - 1}{8}$ D) $\frac{\sqrt{5} + 1}{8}$

E) 0

CLAVE: E

PROBLEMA 13 (PC4 2019-1)

Calcule el valor de $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\sec\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \frac{\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{\sec\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{\sec\left(\frac{6\pi}{7}\right)}$

A) $\frac{5}{6}$

B) $\frac{4}{7}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{2}{9}$

E) $\frac{1}{10}$

CLAVE: C**PROBLEMA 14**

Calcule el valor de

$$N = 3 + \frac{\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \frac{\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{\tan\left(\frac{6\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)}$$

A) $1/4$

B) $3/4$

C) $5/2$

D) $7/4$

E) $9/4$

CLAVE: C

PRODUCTOS DE R.T. DE ARCOS DE LA FORMA $\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right), n, k \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^n \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{2n+1} \right) \times \cdots \times \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{2n+1} \right) \times \cdots \times \cos \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) = \frac{1}{2^n}$$

$$\prod_{k=1}^n \tan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \tan \left(\frac{2\pi}{2n+1} \right) \times \cdots \times \tan \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) = \sqrt{2n+1}$$

Ejemplos

$$1) \prod_{k=1}^3 \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{7} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{7} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{7} \right) = \frac{\sqrt{7}}{2^3}$$

$$2) \prod_{k=1}^3 \cos \left(\frac{k\pi}{7} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right) = \frac{1}{2^3}$$

$$3) \prod_{k=1}^3 \tan \left(\frac{k\pi}{7} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{7} \right) \tan \left(\frac{2\pi}{7} \right) \tan \left(\frac{3\pi}{7} \right) = \sqrt{7}$$

$$4) \prod_{k=1}^4 \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{9} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{9} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{9} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{9} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{9} \right) = \frac{\sqrt{9}}{2^4}$$

$$5) \prod_{k=1}^4 \cos \left(\frac{k\pi}{9} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{9} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{9} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{9} \right) \cos \left(\frac{4\pi}{9} \right) = \frac{1}{2^4}$$

PROBLEMA 15 (PC4 2020-1)

Calcule la siguiente productoria $2^{22} \sin(4^\circ) \sin(8^\circ) \sin(12^\circ) \dots \sin(88^\circ)$

A) 4

B) 6

C) $3\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$

E) 12

CLAVE: C**PROBLEMA 16**

Calcule el valor de $\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right) \left(1 + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right)$

A) $1/8$ B) $3/8$ C) $5/8$ D) $3/4$ E) $7/8$ **CLAVE: A**

PROBLEMA 17

$$\text{Si } \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{11\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{10\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{8\pi}{15}\right) = \frac{a}{b}$$

donde a y b son primos entre sí, calcule el valor de $a + 2^{-3}b$.

A) 1

B) 15

C) 16

D) 17

E) 18

CLAVE: D**PROBLEMA 18**

$$\text{Si la expresión } \frac{\left[\tan\left(\frac{4\pi}{11}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{11}\right)\right] \left[\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)\right]}{\left[\cot\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)\right] \left[\cot\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)\right]} \text{ equivale a } N,$$

calcule el valor de $N \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

A) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{11}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ D) $-\frac{\sqrt{11}}{4}$ E) $-\frac{\sqrt{11}}{8}$ **CLAVE: D**

PROBLEMA 19

Calcule el valor de $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{7}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{7}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)}$

A) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

B) $\frac{\sqrt{7}}{14}$

C) $\sqrt{7}$

D) $2\sqrt{7}$

E) $3\sqrt{7}$

CLAVE: D

PROBLEMA 20

Si $x = \pi/18$, calcule el valor de

$$\prod_{k=1}^4 [\sin(kx) \cdot \sec(kx) \cdot \sec(2kx) + \tan(kx)]$$

A) 2

B) 3

C) 5

D) 6

E) 8

CLAVE: B**PROBLEMA 21**

Si $\prod_{k=1}^3 \left[\frac{\tan\left(\frac{k\pi}{14}\right)}{\tan\left(\frac{k\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{k\pi}{14}\right)} \right] = \frac{a}{b}$, calcule el valor de $a+b$.

A) 2

B) 4

C) 7

D) 8

E) 9

CLAVE: E

PROBLEMA 22

Calcule el valor de $\prod_{k=1}^6 \left[\sec^2 \left(\frac{k\pi}{26} \right) + \csc^2 \left(\frac{k\pi}{26} \right) \right]$

A) $\frac{2^{12}}{13}$

B) $\frac{2^{13}}{13}$

C) $\frac{2^{24}}{13}$

D) $\frac{2^{26}}{13}$

E) $\frac{2^{11}}{13}$

CLAVE: C**PROBLEMA 23**

Calcule el valor de $\prod_{k=1}^5 \left\{ \cot \left(\frac{k\pi}{22} \right) - \tan \left(\frac{k\pi}{22} \right) \right\}^{-1}$

A) $2^{-8} \sqrt{11}$

B) $2^{-5} \sqrt{11}$

C) $2^{-21} \sqrt{22}$

D) $2^{-10} \sqrt{22}$

E) $2^{-5} \sqrt{10}$

CLAVE: B